

*Lars Perle*

*Studienreferendar*

*Elisabethschule*

Marburg, den 9. März 2002

Unterrichtsentwurf zur Prüfungslehrprobe  
für das  
2. Staatsexamen Lehramt an Gymnasien  
im Fach Mathematik

Thema der Unterrichtsreihe  
Die Rationalen Zahlen  
Thema der Stunde

# Einführung in die Rationalen Zahlen

in der Klasse 7b

am 11.03.2002, 3. Stunde ( $9^{50} - 10^{35}$ ), Raum 22

Prüfungsvorsitzender: Herr Jöllenbeck

Schulleiter: Herr Fuchs

Fachleiterin Mathematik: Frau Nölle

Fachleiter Sozialkunde / Gemeinschaftskunde: Herr Kraschweski

Schulseminarleiterin: Frau Kraatz

Verbandsmitglied: Frau Liedtke

Fachlehrer: Herr Schoof

## 1 Lerngruppe

Die Klasse 7b wurde im ersten Halbjahr des Schuljahres eigenverantwortlich von mir in Mathematik unterrichtet. Seit dem Halbjahreswechsel ist Herr Schoof ihr Fachlehrer. Die Klasse setzt sich zusammen aus 9 Mädchen und 15 Jungen. Die Schüler beteiligen sich überwiegend gut am Unterricht und lassen sich besonders für kontroverse Probleme begeistern, bei denen sich die Möglichkeit einer Diskussion bietet. Alltagsprobleme lassen sich ebenfalls gut im Unterricht verwenden.

Die Schüler verstehen sich untereinander überwiegend sehr gut, was sich hin und wieder in Form von Privatgesprächen störend auf den Unterricht auswirkt. Besonders in Übungsphasen muss bei einem Großteil darauf geachtet werden, dass sie sich nicht gegenseitig ablenken. Die Motivation und somit auch die Konzentration der Schüler nimmt hier schnell ab. Die Klasse ist nicht außergewöhnlich gut, aber sehr kooperativ untereinander und auch ihren Lehrern gegenüber.

Für die Online-Version wurde hier ein Teil aus Gründen des Datenschutzes entfernt.

Nach anfänglichen Schwierigkeiten beziehen sich die Schüler in Gesprächsphasen inzwischen häufiger auf Redebeiträge ihrer Mitschüler.

Gruppenarbeitsphasen sind in der Klasse ein Problem, da der eigentliche Klassenraum (Raum 27) sehr klein ist. Der Umbau zu Gruppentischen dauert lange und die Schüler sitzen dann zum Teil Rücken an Rücken. Dies hat zur Folge, dass die Klasse selten in dieser Sozialform arbeitet, was die Anwendung zusätzlich erschwert. Dagegen funktioniert Partnerarbeit sehr gut, da die Schüler in dieser Arbeitsform geübt sind.

## 2 Unterrichtszusammenhang

Die Stunde ist die erste Stunde der Einheit “Rationale Zahlen”, die nach dem Rahmenplan Mathematik<sup>1</sup> in der Klassenstufe 7 oder 8 und nach dem schulinternen Curriculum im 2. Halbjahr der Klasse 7 stattfinden soll. Die vorangegangene Einheit “Dreieckskonstruktion” wurde in der letzten Woche durch eine Klassenarbeit von Herrn Schoof abgeschlossen. In den beiden

---

<sup>1</sup>Hessisches Kultusministerium (Hg.) (1995), S.40f.

vorangegangenen Stunden habe ich wieder begonnen zu unterrichten, allerdings noch nicht in das neue Thema eingeführt, sondern die Stunde genutzt, um Stoff des ersten Halbjahres und die Methode “Aufgaben selbst erfinden” zu wiederholen.

Die heutige Stunde soll in das Thema “Rationale Zahlen” einführen und die Schüler motivieren sich mit diesem Thema in den nächsten Wochen zu beschäftigen. Sie soll aber auch das Vorwissen der Schüler feststellen, um die weitere Einheit auf diese Lerngruppe abzustimmen.

### 3 Didaktische Überlegungen

Aus Sicht der heutigen - formal axiomatisch aufgebauten - Mathematik erweitern die negativen ganzen Zahlen die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  zur Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Der Ring  $\mathbb{Z}$  wird schließlich zum Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erweitert. Obwohl die Schüler bereits seit über einem Jahr mit der Menge der positive rationalen Zahlen einschließlich der Null  $\mathbb{Q}_0^+$  rechnen, führen einige Schulbücher die negativen Zahlen über diesen formalen Weg ein und betrachten zunächst nur ganze Zahlen<sup>2</sup>. M.E. ist der intuitivere Weg der Erweiterung von  $\mathbb{Q}_0^+$  um  $\mathbb{Q}^-$  sinnvoller, da für die Schüler verständlicher. Hier kann die historische Entwicklung Vorbild für das Erlernen des Umgangs mit den rationalen Zahlen sein. Nachdem schon lange mit positiven rationalen Zahlen gerechnet wurde, fanden die negativen rationalen Zahlen erst im 16. Jahrhundert Eingang in die abendländische Mathematik<sup>3</sup>. Ein weiteres Charakteristikum der historischen Entwicklung war die schrittweise Einführung negativer Zahlen. Negative Zahlen tauchten zunächst im Zusammenhang mit der konkreten Anschauung auf. So nannten die Inder, die bereits im 7. Jahrhundert mit negativen Zahlen rechneten, sie “Schulden” im Gegensatz zu den positiven Zahlen, die sie “Vermögen” nannten. Obwohl die Bezeichnungen blieben, rechneten sie in der Folge auch abstrakt mit negativen Zahlen. In Europa verlief die Entwicklung ähnlich<sup>4</sup>.

Ein ähnlicher Prozess kann bei den Schülern erwartet werden. Malle beschreibt die Begriffsentwicklung der negativen Zahlen bei den Schülern in fünf Schritten: 1. Gegensätzliches Deuten der positiven Zahlen; 2. Entdecken neuer Beziehungen zwischen positiven und negativen Zah-

---

<sup>2</sup>z.B. Griesel / Postel (Hg.) (1995), S.154ff

<sup>3</sup>Popp (1999), S.105

<sup>4</sup>ebda. S.106

len; 3. Geänderte Vorstellung von Ordnung, Addition und Subtraktion; 4. Sinngebung neuer Schreibweisen; 5. Erkennen des definitorischen Charakters der Rechenoperationen<sup>5</sup>.

Die heutige Stunde soll u.a. feststellen, auf welcher Stufe der Begriffsentwicklung die Schüler stehen. Im Gegensatz zur historischen Entwicklung, in der viele Hindernisse überwunden werden mussten, um überhaupt von negativen Zahlen zu sprechen<sup>6</sup>, kennen die Schüler negative Zahlen bereits aus ihrem Alltag. Ob als Temperaturangabe, Kontostände oder Tordifferenzen beim Sport: dass es negative Zahlen gibt ist für sie selbstverständlich. Jedoch kann nach Malle angenommen werden, dass negative Zahlen von den Schülern noch als positive Zahlen aufgefasst werden, die je nach Zusammenhang verschieden interpretiert werden. So sind “ $-5$ ,  $-DM$  dasselbe wie  $+5$ ,  $-DM$ , nur Schulden statt Guthaben”<sup>7</sup>. Aufgrund einer Zusatzaufgabe in der vorletzten Klassenarbeit<sup>8</sup>, ist davon auszugehen, dass auch ein Großteil der Schüler bereits vage Vorstellungen von den Beziehungen zwischen negativen und positiven Zahlen hat.

Daher beginnt die Stunde nicht mit dem Entdecken der negativen Zahlen, sondern bereits mit dem Entdecken von Beziehungen zwischen positiven und negativen Zahlen. Dazu sollen die Schüler Temperaturunterschiede innerhalb einer Wetterkarte Europas betrachten. Ziel der Bearbeitung soll die Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden sein. Dies dient zum einen zur Begriffsbildung, da die rationalen Zahlen als Konstrukt aus negativen und positiven Zahlen und der Null verdeutlicht werden. Zum anderen soll die Zahlengerade aber auch als Rechenhilfe für diese und die folgenden Stunden dienen. So ist mit ihr die Anordnung der rationalen Zahlen gut zu verdeutlichen. Rechnungen, die “über die Null” gehen (z.B.  $+5-12$ ), lassen sich durch Zurückzählen lösen<sup>9</sup>.

---

<sup>5</sup>Malle (1989)

<sup>6</sup>Die griechische und später die abendländische Mathematik hatte Schwierigkeiten sich von der aristotelischen Sichtweise, nach der es nichts geben könne, das weniger als Nichts (also Null) sei, zu lösen.

<sup>7</sup>ebda. S.14

<sup>8</sup>Die Schüler hatten einen Haben- und einen Soll-Kontostand gegeben und sollten überlegen, wie viel Geld der Kontoinhaber abgehoben hat. Die Aufgabe wurde von gut der Hälfte der Schüler bearbeitet und davon von über 80% richtig gelöst.

<sup>9</sup>siehe dazu Hefendehl-Hebeker (1989), S.52

## 4 Methodische Überlegungen

Die Stunde beginnt damit, dass die Schüler eine Temperaturkarte Europas bekommen (siehe Anhang) und sich dazu jeweils zu zweit Aufgaben ausdenken sollen, die sie anschließend versuchen sollen zu lösen<sup>10</sup>. Temperaturskalen sind besonders geeignet, da sie den Zusammenhang zwischen Konkretion (Temperaturmessung) und formaler Konstruktion (Zahlengeraden) verdeutlichen.

Der Einstieg über eine offene Aufgabe dient mehreren Zwecken. Zunächst ist er geeignet die verschiedenen Fähigkeiten der Schüler bezüglich negativer Zahlen zu erkunden, was ja ein zentrales Anliegen der Stunde ist. Weiterhin wirken offene Aufgaben binnendifferenzierend, da die Schüler je nach ihren Möglichkeiten den Arbeitsauftrag bearbeiten werden. Dies wiederum bewirkt eine breite Schüleraktivierung, da sich alle Schüler mit der Karte (und damit auch mit positiven und negativen Zahlen) beschäftigen können. So könnte ein schwächerer Schüler zunächst Aufgaben von der Form *“Welche Temperatur ist in ...”* stellen, während stärkere Schüler nach dem Temperaturunterschied verschiedener Städte fragen können. Die Vernetzung mit Kenntnissen aus dem Physik- und Erdkundeunterricht ist teilweise ebenfalls gegeben.

Die Aufgabe soll jeweils zu zweit bearbeitet werden, da sich die Schüler so gegenseitig auf weitere Ideen bringen können und gegebenenfalls anfängliche Schwierigkeiten bei der Ideensuche leichter überbrückt werden können. Dies ist besonders für Schüler wie Carsten und Jan wichtig, um Hemmungen gegenüber neuen Themen und produktiven Arbeitsweisen abbauen zu können.

Nach dieser Phase sollen die Schüler ihre Aufgaben - jedoch noch nicht die Lösungen - vorstellen. Um die Arbeit der Schüler zu würdigen sollen möglichst viele Schülerpaare zu Wort kommen, andererseits soll auch keiner dazu gedrängt werden seine Aufgabe vorzulesen. Einige der Aufgaben sollen dabei an der Tafel festgehalten werden, um sie genauer zu besprechen.

Dies soll im daran anschließenden Unterrichtsgespräch geschehen. Ziel soll die Erarbeitung der Zahlengeraden sein. Dieser Teil ist nur bedingt planbar, da er sehr von den erstellten Aufgaben abhängt. Eine mögliche Hinführung wäre die Frage, wie eine Aufgabe von der Art *“Welcher Temperaturunterschied herrscht zwischen Madrid und Moskau?”* zu lösen ist. Dies würde über die verschiedene Wege *“Zurückzählen”*  $+10 \xrightarrow{-15} -5$  oder schrittweises Rechnen über die Null  $+10 \xrightarrow{-10} 0 \xrightarrow{-5} -5$  sinnvoll zur Zahlengeraden führen, an der dann die Bezeichnungen positive,

<sup>10</sup>Die Idee zu diesem Einstieg stammt von H. Massie (siehe auch BLK-Modellversuch, S.3)

negative und rationale Zahlen verdeutlicht werden könnten. Die Leistung der Schüler soll hier nochmal durch einen kurzen Lehrervortrag über die historische Entwicklung hervorgehoben werden, gleichzeitig soll ein kurzer Ausblick auf die Einheit gegeben werden. Das Tafelbild soll danach in das Heft übernommen werden.

Um den Schülern für die weitere Einheit möglichst viele Anknüpfungspunkte zu geben, sollen sie nach dem Abschreiben überlegen wo negative Zahlen im Alltag vorkommen. Dies soll in Einzelarbeit geschehen, da so einerseits die unterschiedlichen "Abschreibegeschwindigkeiten" aufgefangen werden und sich andererseits alle Schüler bemühen müssen Verknüpfungen mit ihrem Alltag herzustellen. Die verschiedenen Bereiche sollen an der Tafel gesammelt und danach der Hefteintrag ergänzt werden.

Sollte dann noch Zeit übrig sein, sollen sich die Schüler eine weitere Aufgabe zu einem der genannten Bereiche ausdenken und lösen. Dies soll die Ansätze zum Rechnen mit rationalen Zahlen vertiefen und eventuelle Schwierigkeiten aufdecken. Alternativ kann dies auch als Hausaufgabe aufgegeben werden.

## 5 Lehrabsichten

- Der Kenntnisstand der Schüler bezüglich negativer Zahlen soll festgestellt werden.

Die Schüler sollen

- die negativen Zahlen als Fortsetzung der bekannten positiven Zahlen (einschließlich der Null) anhand der Zahlengeraden begreifen;
- die Zahlengerade als Rechenhilfe nutzen können;
- die rationalen Zahlen als Menge der positiven und der negativen Zahlen einschließlich der Null definieren können.

# Literatur

**Blum, Werner / Wiegand, Bernd (1999):** Offene Probleme für den Mathematikunterricht - Kann man Schulbücher dafür nutzen? Auszüge aus einem Vortrag vom 2.3.1999 auf der GDM-Jahrestagung in Bern. <http://modellversuch-mathematik.he.schule.de/Modellversuch%20Hessen/Modellversuch-Vortrag%20offene%20Aufgaben.htm>

**BLK-Modellversuch:** Materialien zum Modellversuch: Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur: Zum Themengebiet Rationale Zahlen. <http://modellversuch-mathematik.he.schule.de/Materialien/pdf-Dokumente/04Rationale%20Zahlen.pdf>

**Griesel, Heinz / Postel, Helmut (Hg.) (1995):** Mathematik heute, 7. Schuljahr. Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover.

**Hefendehl-Hebeker, Lisa (1989):** Erfahrungen mit negativen Zahlen im Gymnasium. in: Mathematik lehren, H.35, S.48-58.

**Hessisches Kultusministerium (Hg.) (1995):** Rahmenplan Mathematik, Sekundarstufe I. Verlag Moritz Diesterweg, Wiesbaden.

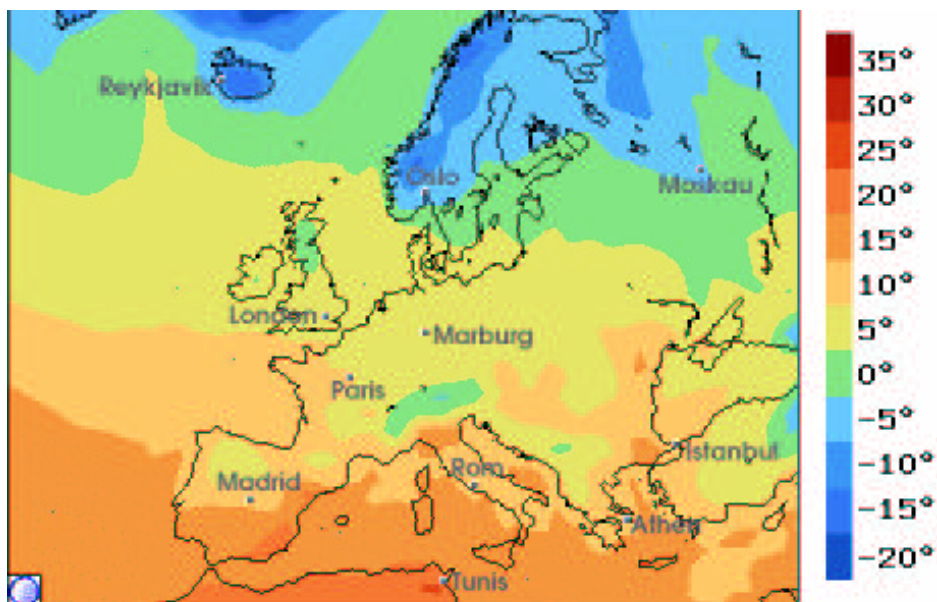
**Malle, Günther (1989):** Die Entstehung negativer Zahlen als eigenständige Denkgegenstände. in: Mathematik lehren, H.35, S.14-17.

**Popp, Walter (1999):** Fachdidaktik Mathematik: ein entwicklungsgeschichtlicher Ansatz. Aulis-Verlag, Deubner, Köln.

# Anhang 1: Stundenverlauf

Phasen	Einführung in die Rationalen Zahlen Unterrichtsgeschehen	11.03.02	Sozialformen und Handlungsmuster	Medien
Einstieg	Verteilen der Arbeitsblätter „Temperaturkarte“ und Auflegen der Folie auf den OHP. „Überlegt euch jeweils zu zweit Aufgaben zu der Karte. Notiert auch die Antworten. (Beides ins Heft)“		Arbeit in 2er- Gruppen	AB und Folie „Tem- peraturkarte“; OHP
Sammlung	Einige Schüler lesen ihre Aufgaben vor und schreiben sie dann an die Tafel (zunächst unkommentiert und noch ohne Antwort)		Schülervorträge	Tafel (innen links und rechts)
Erarbeitung I	Unterrichtsgespräch zu den erstellten Aufgaben. (Ziele: negative Zahlen ergänzen die positiven; Temperaturunterschiede lassen sich z.B. durch „Zurückzählen“ oder „Vorwärtszählen“ ablesen) Anzeichnen des Zahlenstrahls und Erweiterung zur Zahlengeraden		Unterrichtsgespräch	Tafel (innen)
Sicherung	Kurzer Lehrevortrag zur Historie der negativen Zahlen und zur weiteren Einheit Abschreiben lassen von der Tafel unter der Überschrift „Rationale Zahlen“		L-Vortrag Einzelarbeit	
Erarbeitung II	„Überlegt euch, woher ihr sonst noch negative Zahlen kennt. Schreibt sie in euer Heft, unter der Überschrift 'Wo kommen negative Zahlen im Alltag vor?'“ Sammelh an der Tafel		Einzelarbeit U-Gespräch	Tafel (außen)
Übung	Falls noch Zeit (sonst HA): „Überlegt euch zu einem Bereich eine weitere Aufgabe, in der negative Zahlen vorkommen und löst sie.“		Einzelarbeit	

## Anhang 2: Temperaturkarte



Überlege dir mit deinem Nachbarn Aufgaben zu der Karte!  
Versucht die von euch gestellten Aufgaben zu lösen!